UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Appunti del Corso di Dottorato
Introduzione alla Teoria della Misura

Luca Esposito

Indice

1. Misure esterne

La definizione di misura esterna presentata in questa sezione é dovuta principalmente a C.Carathéodory (1918).

Definizione 1.1. *Sia X un insieme qualunque. Si dice misura esterna, o misura numerabilmente subadditiva, ogni funzione*

$$\mu^e : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty] \qquad \textit{tale che,}$$

a) $\mu^e(\emptyset) = 0$

b) $\mu^e(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^e(A_n)$ *per ogni* $\{A_n\}$ *tale che* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

osservazione 1.1. *Ogni misura esterna μ^e é una funzione crescente di insieme, infatti dalla (b) segue $\mu^e(A) \leq \mu^e(B)$ se $A \subset B$.*

Il vantaggio di operare con misure esterne é dovuto al fatto che tali misure sono definite su tutti i sottonisiemi di X. Non é però garantito che per tutte le coppie A, B di sottinsiemi disgiunti di X risulti μ^e additiva ovvero $\mu^e(A \cup B) = \mu^e(A) + \mu^e(B)$. Per individuare la classe dei sottoinsiemi di X per i quali vale l'additivitá oltre la subadditivitá si introduce la seguente

Definizione 1.2. *Sia $A \subset X$, si dice che A risulta μ^e-misurabile se e solo se*

$$\mu^e(B) = \mu^e(B \cap A) + \mu^e(B \setminus A) \quad \forall B \subset X \tag{1.1}$$

Si osservi che ogni insieme di μ^e-misura nulla risulta μ^e-misurabile e naturalmente $A \subset X$ μ^e-misurabile se se solo se $X \setminus A$ μ^e-misurabile.

Teorema 1.1 (Proprietá degli insiemi misurabili). *Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi μ^e-misurabili.*

i) Gli insiemi $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *e* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *sono μ^e- misurabili*

ii) Se gli insiemi $\{A_n\}$ sono disgiunti allora

$$\mu^e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^e(A_n)$$

iii) Se $A_1 \subset \cdots A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^e(A_n) = \mu^e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

iv) Se $A_1 \supset \cdots A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$, $\mu^e(A_1) < \infty$ *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^e(A_n) = \mu^e\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Dimostrazione. Nel seguito per provare che un generico insieme E risulta misurabile ci faremo carico di dimostrare unicamente che $\mu^e(B) \geq \mu^e(B \cap E) + \mu^e(B \setminus E)$ $\forall B \subset X$ dato che la disuguaglianza opposta segue dalla subadditivitá. Iniziamo a provare che intersezioni finite e unioni finite di misurabili sono misurabili. Siano A_1 ed A_2 μ^e-misurabili e $B \subset X$, allora

$$\begin{aligned}
\mu^e(B) &= \mu^e(B \cap A_1) + \mu^e(B \setminus A_1) \\
&= \mu^e(B \cap A_1) + \mu^e((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^e((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&\geq \mu^e(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^e(B \setminus (A_1 \cup A_2)) \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

ed dunque $A_1 \cup A_2$ é μ^e- misurabile. Dato che inoltre $X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$ si deduce che anche $A_1 \cap A_2$ é μ^e- misurabile. Per induzione su un numero finito di insiemi μ^e- misurabili si ottiene che la famiglia dei misurabili é chiusa per unione ed intersezione finita. Sia poi A_j una successione numerabile di insiemi disgiunti con unione A, verifichiamo che A é μ^e-misurabile, sia dunque $B \subset X$ qualsiasi e $k \in \mathbb{N}$, procedendo come nella (1.2) si ottiene

$$\mu^e(B) = \sum_{j=1}^{k} \mu^e(B \cap A_j) + \mu^e\left(B \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_k\right) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^e(B \cap A_j) + \mu^e(B \setminus A)$$

passando dunque al limite per $k \to \infty$

$$\mu^e(B) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^e(B \cap A_j) + \mu^e(B \setminus A) \geq \mu^e(B \cap A) + \mu^e(B \setminus A). \qquad (1.3)$$

Dunque A é μ^e-misurabile. Infine se A_j non é costituita da insiemi disgiunti si pone $B_1 = A_1$, $B_j = A_j \setminus B_{j-1}$. Gli insiemi B_j sono disgiunti e hanno la stessa unione degli A_j. Resta cosí provato che l'unione numerabile di misurabili é misurabile. Attraverso le leggi di De Morgan si deduce che lo stesso vale per intersezioni numerabili.
La (ii) segue dalla (1.3) con la scelta di $B = A$. La iii) é una conseguenza immediata della (ii) applicata agli insiemi $A_{j+1} \setminus A_j$ da cui si ricava appunto

$$\lim_{j \to \infty} \mu^e(A_j) = \mu^e(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^e(A_{j+1} \setminus A_j) = \mu^e\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

La (iv) é conseguenza della (iii) dato che se A_j é decrescente $(A_1 \setminus A_j)$ é crescente e dunque

$$\begin{aligned}
\mu^e(A_1) - \lim_{j \to \infty} \mu^e(A_j) = \lim_{j \to \infty} \mu^e(A_1 \setminus A_j) &= \mu^e\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)\right) \\
&\geq \mu^e(A_1) - \mu^e\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)
\end{aligned}$$

□

2. σ algebre, e misure positive

Alla luce di quanto provato nel Teorema 1.1 e dato che siamo interessati a trattare misure numerabilmente additive é naturale la seguente.

DEFINIZIONE 2.1. *Sia $X \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X.*

a) Diremo che $\mathcal{F}$ é un algebra se $\emptyset \in \mathcal{F}$, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ ed $X \setminus A_1 \in \mathcal{F}$ per ogni $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$.

b) Diremo che $\mathcal{F}$ é una σ-algebra se, $\mathcal{F}$ é un algebra e per ogni successione $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ l'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene ad $\mathcal{F}$

c) Per ogni famiglia $\mathcal{G}$ di sottoinsiemi di X si definisce la σ-algebra generata da $\mathcal{G}$ come la piú piccola σ-algebra contenente $\mathcal{G}$.

d) Se $\mathcal{F}$ é una σ-algebra di X, la coppia $(X, \mathcal{F})$ si dirá spazio di misura.

OSSERVAZIONE 2.1. *Con la terminologia introdotta la (i) del Teorema 1.1 asserisce che la famiglia degli insiemi μ^e- misurabili associati ad una misura esterna μ^e é una σ- algebra.*

Le σ algebre sono l'ambiente naturale su cui definire le misure numerabilmente additive che andiamo ad introdurre.

DEFINIZIONE 2.2 (Misure Positive). *Sia $(X, \mathcal{F})$ uno spazio di misura e $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty,]$. Diremo che μ é una misura positiva se e solo se $\mu(\emptyset) = 0$, e se μ é σ-additiva su $\mathcal{F}$ ovvero*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

per ogni successione A_n di insiemi disgiunti di $\mathcal{F}$.

Rileviamo che viceversa é sempre possibile estendere una misura positiva μ ad una misura esterna definita su tutto $\mathcal{P}(X)$ (vedi Esercizio 2) ponendo.

$$\mu^e(E) = \inf\{\mu(A);\ E \subset A;\ A \in \mathcal{F}\}. \tag{2.1}$$

Si osservi che alla luce delle definizione date in questa sezione la (ii) del Teorema 1.1 puó essere riformulata dicendo che ogni misura esterna μ é una misura positiva sulla σ-algebra degli insiemi μ-misurabili. Nel contesto delle misure positive vengono detti μ-misurabili gli insiemi della famiglia $\mathcal{F}$, naturalmente questo é in accordo con la definizione 1.2 nel senso che ogni insieme di $\mathcal{F}$ risulta essere μ^e-misurabile (vedi Esercizio 3).

OSSERVAZIONE 2.2. *Osserviamo esplicitamente che gli insiemi μ-misurabili della famiglia $\mathcal{F}$ relativi ad una misura positiva μ verificano (ii) (iii) e (iv) del Teorema 1.1.*

DEFINIZIONE 2.3. *Un insieme $A \subset X$ si dice σ-finito rispetto a μ se esiste una successione A_n di insiemi μ-misurabili di misura finita, $\mu(A_n) < \infty$ per $n = 1, 2, \ldots$ tale che $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se X stesso ha misura finita la misura μ si dice finita e se $\mu(X) = 1$ la misura μ viene detta misura di probabilitá.*

Alla fine della sezione proviamo un criterio di coincidenza che individua come é fatta la struttura di una sottofamiglia $\mathcal{G}$ di $\mathcal{P}(X)$ sulla quale una volta scelti i valori di μ (misura positiva) é possibile un'unica estensione di μ alla σ-algebra generata da $\mathcal{G}$.

TEOREMA 2.1 (Criterio di coincidenza). *Siano μ, ν misure positive finite sullo spazio di misura $(X, \mathcal{F})$ e sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una famiglia chiusa per intersezione finita tale che $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{G}$ e $\mu(X) = \nu(X)$, allora μ e ν coincidono sulla σ-algebra generata da $\mathcal{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il Teorema osserviamo che se $\mathcal{H}$ é la famiglia su cui μ e ν coincidono, $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{F} \ : \ \mu(A) = \nu(A)\}$ non é detto che questa sia una σ algebra ma comunque $\mathcal{H}$ é chiusa per complemento per unione crescente e per intersezione di elementi la cui unione é in $\mathcal{H}$ ovvero verifica

$$
\begin{aligned}
&a) \ (A_n) \subset \mathcal{H}, A_n \uparrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{H} \\
&b) \ A, B, A \cup B \in \mathcal{H} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{H} \\
&c) \ A \in \mathcal{H} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{H}
\end{aligned}
$$

come si evince dalla additivitá della misura e dalla (iii) del Teorema 1.1. Denotiamo con $\mathcal{M}$ la piú piccola famiglia contenente $\mathcal{G}$ che verifica (a), (b), (c). Naturalmente $\mu(A) = \nu(A)$ su $\mathcal{M}$. Faremo vedere che $\mathcal{M}$ é una σ-algebra. Osserviamo che per questo é sufficiente provare che $\mathcal{M}$ é chiusa per intersezione finita infatti in tal caso lo sará anche per unione finita grazie alla (c) ed anche per unione numerabile grazie alla (a). Sia dunque $B \in \mathcal{M}$ e definiamo $\mathcal{M}_B = \{A \in \mathcal{M} \ : \ B \cap A \in \mathcal{M}\}$ sará sufficiente provare che $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$ per ogni $B \in \mathcal{M}$. Iniziamo a far vedere che $\mathcal{M}_B$ soddisfa le condizioni (a), (b) e (c). La prova di (a) é ovvia, per verificare (b) scegliamo $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_B$ ed assumiamo $B \cap (A_1 \cup A_2) \in \mathcal{M}$ quest'ultima condizione implica che $(B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = B \cap (A_1 \cap A_2)$ appartiene ad $\mathcal{M}$ e dunque $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}_B$. Infne per provare la (c), sia $A \in \mathcal{M}_B$; allora, $B \cap (X \setminus A) = B \cap (X \setminus (A \cap B))$ appartiene ad $\mathcal{M}$ dato che $B, X \setminus (B \cap A)$ e $B \cup (X \setminus (B \cap A)) = X$ appartengono ad $\mathcal{M}$. Per concludere osserviamo a questo punto se $B \in \mathcal{G}$; dato che $\mathcal{G}$ gode della proprietá di interesezione finita risulta $\mathcal{M}_B \supset \mathcal{G}$ e dunque per minimalitá di $\mathcal{M}$ si conclude $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$ ovvero $A \cap B \in \mathcal{M}$ per ogni $A \in \mathcal{M}$ e per ogni $B \in \mathcal{G}$. Dato che $B \in \mathcal{G}$ é arbitrario questo comporta $\mathcal{M}_B \supset \mathcal{G}$ per ogni $B \in \mathcal{M}$ e sempre per minimalitá di $\mathcal{M}$ si deduce $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$. Dato che B é arbitratio questo prova che $\mathcal{M}$ é chiuso per intersezione finita e dunque la tesi. □

Il Teorema 2.1 continua a valere anche se non si assumono μ, ν finite ma si suppone che esiste $\{X_n\}$ in $\mathcal{G}$ tale che $X = \cup X_n$ e $\mu(X_n) = \nu(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO 2.1. *Se $(X, \mathcal{F})$ é uno spazio di misura definiamo le seguenti misure su X:*

i) (Misura che conta i punti) Definiamo $\#(\emptyset) = 0$, $\#(A)$ uguale alla cardinalitá di A se A é finito, $\#(A) = \infty$ altrimenti.

ii) (Misura di di Dirac) Per ogni $x \in X$ si definisce δ_x la misura seguente

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \in A \end{cases}$$

Esercizi

Esercizio 1. Provare che un'algebra di sottoinsiemi di X é una σ-algebra se e solo se é chiusa per unione numerabile crescente.

Esercizio 2. Provare che la misura μ^e definita nella (2.1) é una misura esterna.

Esercizio 3. Provare che data una misura positiva μ sullo spazio di misura $(X, \mathcal{F})$ gli insiemi di $\mathcal{F}$ sono μ^e-misurabili se μ^e é definita come nella (2.1).

3. Misure negli spazi metrici.

In questa sezione ci occuperemo di alcuni risultati sulle misure negli spazi metrici con particolare attenzione al criterio di Caratheodory.

DEFINIZIONE 3.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, denoteremo con $\mathcal{B}(X)$ la σ-algebra dei boreliani di X ovvero la σ-algebra generata dai sottoinsiemi aperti di X. Una misura μ definita su $\mathcal{B}(X)$ la diremo misura di Borel.*

Nel resto della sezione denoteremo sempre con X uno spazio metrico localmente compatto e separabile (abbreviato l.c.s.) e con d la metrica su tale spazio.

Il criterio seguente svolge un ruolo centrale nella teoria di Caratheodory delle misure esterne, e consente di individuare se una misura esterna é di Borel.

TEOREMA 3.1 (Criterio di Caratheodory). *Sia μ una misura esterna su X; per la quale risulti*

$$dist(A, B) > 0 \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{3.1}$$

per ogni $A, B \subset X$; allora μ é σ-additiva su $\mathcal{B}(X)$ ovvero μ é una misura di Borel.

DIMOSTRAZIONE. Dato che la famiglia dei μ-misurabili é una σ-algebra su cui μ risulta σ-additiva, grazie al Teorema 1.1, é sufficiente verificare che tale σ-algebra contiene gli insiemi chiusi.

Sia dunque $C \subset X$ chiuso. Dobbiamo provare che

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap C) + \mu(B \setminus C) \tag{3.2}$$

per ogni $B \subset X$.

Se $\mu(B) = \infty$ la (3.2) é ovvia. Assumiamo dunque $\mu(B) < \infty$ e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \left\{ x \in X;\ dist(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Dato che $dist(B \setminus C_n, B \cap C) \geq 1/n > 0$ se ne deduce per ipotesi che

$$\mu(B) \geq \mu((B \setminus C_n) \cup (B \cap C)) = \mu(B \setminus C_n) + \mu(B \cap C) \tag{3.3}$$

Se proviamo che $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus C_n) = \mu(B \setminus C)$ la dimostrazione é dunque conclusa. A tale scopo poniamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$R_k = \left\{ x \in B;\ \frac{1}{k+1} < dist(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Poiché $B \setminus C = (B \setminus C_n) \bigcup (\cup_{k=n}^{\infty} R_k)$ si ha

$$\mu(B \setminus C_n) \leq \mu(B \setminus C) \leq \mu(B \setminus C_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k). \tag{3.4}$$

Se proviamo che $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty$ il resto di tale serie sarebbe infinitesimo, ovvero $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k) = 0$ e potremmo passare cosí al limite nella (3.4) ottenendo la tesi.

Dato che $dist(R_h, R_k) > 0$ se $h \geq k + 2$ applicando l'additivitá sui distanti otteniamo

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}) \leq \mu(B),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k+1}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k+1}) \leq \mu(B).$$

Combinando assieme queste due informazioni si deduce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \leq 2\mu(B) < \infty.$$

Passando al limite nella (3.4) si deduce dunque $\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus C_n) = \mu(B \setminus C)$ e finalmente passando al limite nella (3.3) si ottiene la (3.2) e dunque la tesi. □

Particolarmente interessante é il fatto che per le misure di Borel vale un risultato di approssimazione della misura di un insieme attraverso la misura di insiemi chiusi o aperti. Precisamente vale il seguente.

Teorema 3.2. *Sia X spazio metrico l.c.s.e μ una misura di Borel su X e supponiamo che esistano degli aperti $X_n \subset X$ di misura finita, ovvero $\mu(X_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup X_n$; allora per ogni boreliano $B \in \mathcal{B}(X)$ risulta*

$$a)\ \mu(B) = inf\{\mu(A) :\ A \supset B, A\ aperto\}.$$

b) $\mu(B) = sup\{\mu(K) : \ K \subset B, K \ compatto\}$.

Dimostrazione. Per ogni $E \subset X$ definiamo

$$\nu(E) = inf\,\{\mu(A);\ A \text{ aperto };\ E \subset A\}$$

É immediato verificare che ν é una misura esterna su X additiva su insiemi distanti, e dunque grazie al criterio di Caratheodory ν é una misura positiva su $\mathcal{B}(X)$. Naturalmente $\nu(A) = \mu(A)$ per ogni $A \subset X$ aperto e dunque grazie al criterio di coincidenza (Teorema 2.1) ν e μ coincidono su $\mathcal{B}(X)$ e dunque vale la (a). Passando ai complementari si ottiene la (b) con C chiuso al posto di K compatto. Per intersezione dei chiusi C approssimanti con la palla chiusa $\bar{B}_n$ di raggio n si ottiene al crescere di n l'approssimazione con i compatti (vedi Esercizio 1). □

Alla fine di questa sezione utilizzando i risultati appena enunciati possiamo introdurre in maniera semplice e naturale la misura di Lebesgue costruita alla maniera di Carathéodory.

Definizione 3.2 (La misura di Lebesgue). *Denotiamo con $Q_r(x)$ il cubo aperto di $\mathbb{R}^N$ di lato $2r$ e centro x, $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \max_i \mid x_i - y_i \mid < r\}$. Per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$ definiamo*

$$\mathcal{L}^N(A) := \inf \left\{ \sum_{h=0}^{+\infty} (2r_h)^N : \ A \subset \bigcup_{h=0}^{\infty} Q_{r_h}(x_h) \right\}. \tag{3.5}$$

Tale misura é una misura esterna che viene detta misura esterna di Lebesgue.

osservazione 3.1. *É agevole provare che la misura di Lebesgue cosí definita é additiva su insiemi distanti e dunque grazie al criterio di Carathéodory é una misura positiva sui Boreliani. Per dovere di precisione va detto che la classe degli insiemi $\mathcal{L}^N$-misurabili é piú ampia della classe dei Boreliani di $\mathbb{R}^N$.*

Definizione 3.3. *Una misura μ su $\mathbb{R}^N$ si dice Borel regolare se μ é di Borel e se per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$ esiste un Boreliano B tale che $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$. Se inoltre μ é finita sui compatti si dice di misura di Radon.*

Esercizi

Esercizio 1. Sia μ una misura di Borel su X provare che se per $B \subset X$ risulta $\mu(B) = sup\{\mu(K) : \ C \subset B, C\text{chiuso}\}$ allora vale la (b) del Teorema 3.2.
Esercizio 2. Sia X uno spazio metrico e μ una misura esterna additiva sui insiemi distanti. Dimostrare allora che data una successione di insiemi B_n qualsiasi a due a due distanti risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$.
Esercizio 3. Provare che la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^N$ é una misura esterna additiva su insiemi distanti.
Esercizio 4. Verificare che la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^N$ é Borel regolare.

4. Integrali.

In questa sezione torneremo ad indicare con X un insieme qualsiasi sul quale é definita una misura esterna μ, Y denoterá invece uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 4.1. *Una funzione $f : X \to Y$ la diremo μ-misurabile se per ogni aperto $V \subset Y$, risulta $f^{-1}(V)$ μ-misurabile.*

OSSERVAZIONE 4.1. *Sia $f : X \to Y$ una funzione μ-misurabile, dato che $\{A \subset Y : \; f^{-1}(A)$ é μ-misurabile$\}$ é una σ-algebra contente gli aperti allora contiene anche i Boreliani e dunque $f^{-1}(B)$ é μ-misurabile per ogni Boreliano $B \subset X$.*

Cosí come gli insiemi μ-misurabili sono stabili rispetto ad unioni, intersezioni e complementi, le funzioni μ-misurabili sono stabili rispetto a somme prodotti e quozienti.

TEOREMA 4.1. *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni μ-misurabili, allora*

$$i) \; f+g, \;\; f\cdot g, \;\; f/g \; (se\; g \neq 0), \;\; |\, f \,|$$

sono μ-misurabili. Se inoltre $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ é una successione di funzioni μ-misurabili allora

$$ii) \; \inf_{n\geq 1} f_n, \;\; \sup_{n\geq 1} f_n, \;\; e \;\; \liminf_{n\to+\infty} f_n, \;\; \limsup_{n\to+\infty} f_n$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie all'osservazione 4.1 si deduce che f é μ-misurabile se e solo se $f^{-1}(-\infty, a)$ é μ-misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che $f+g$ é μ-misurabile se f, g lo sono.

$$(f+g)^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q},\; r+s<a} (f^{-1}(-\infty, r) \cap g^{-1}(-\infty, s))$$

e dunque $f+g$ é μ-misurabile.

Analogamente dato che $(f^2)^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(-\infty, a^{\frac{1}{2}}) \setminus f^{-1}(-\infty, -a^{\frac{1}{2}})$, risulta f^2 μ-misurabile. Dunque $f\cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$ é μ-misurabile. La dimostrazione che $\frac{1}{g}$ e $|\, f \,|$ sono misurabile é analoga alle precedenti. Per la dimostrazione della (ii) vedi Esercizio 1 $\square$

Nel seguito, assegnato $A \subset X$ indicheremo con χ_A la funzione caratteristica dell'insieme A ovvero

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

DEFINIZIONE 4.2. *Diremo che una funzione $u : X \to \mathbb{R}$ é semplice se l'immagine di u é finita $u(X) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ovvero se u appartiene allo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche. L'integrale di una funzione caratteristica é definito dalla formula*

$$\int_X u \; d\mu := \sum_{z\in im(u)} z\mu(u^{-1}(z)) = \sum_{h=1}^{k} z_h \mu(u^{-1}(z_h))$$

La definizione di integrale si estende ad una qualsiasi funzione non negativa e μ-misurabile per approssimazione con funzioni semplici. Precisamente vale la seguente

DEFINIZIONE 4.3. *Sia $u : X \to [0, +\infty]$ una funzione μ-misurabile si definisce l'integrale di u tramite la formula*

$$\int_X u \; d\mu := \sup \left\{ \int_X v \; d\mu; \; v \; \mu\text{-misurabile, semplice, } v \leq u \right\}$$

Se u é di segno qualunque ci si riconduce al caso non negativo considerando le funzioni $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$.

DEFINIZIONE 4.4. *Sia $u : X \to [-\infty, +\infty]$, μ-misurabile, diremo che u é μ-integrabile e definiamo*

$$\int_X u \; d\mu := \int_X u^+ \; d\mu - \int_X u^- \; d\mu, \tag{4.1}$$

se almeno uno dei due integrali a secondo membro nella (4.1) é finito.

Diremo che u é sommabile se e solo se

$$\int_X | \, u \, | \; \; d\mu < \infty.$$

OSSERVAZIONE 4.2. *Osserviamo che modificare i valori di una funzione su un insieme di misura nulla non modifica la misurabilitá della funzione stessa e non modifica il valore dell'integrale, per questa ragione nella teoria dell'integrazione vengono identificate due funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla. A proposito di insiemi di μ misura nulla nel seguito diremo che una proprietaá P é verificata quasi ovunque se é verificata al di fuori di un insieme di μ misura nulla e scriveremo sinteticamente P é verificata μ q.o.*

Enunciamo ora i ben noti teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale che costituiscono il punto di forza della precedente definizione di integrale.

TEOREMA 4.2 (Lemma di Fatou). *Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ una funzione μ-misurabile ($n = 1, \dots$). Allora*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \; d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia, $g \leq \liminf_{n \to \infty} f_n$, una funzione semplice arbitraria, $g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}$, dove naturalmente é possibile assumere, $a_k > 0$, e gli A_k disgiunti tra loro per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissiamo $0 < t < 1$ e poniamo

$$A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{k,n}$$

con

$$B_{k,n} = A_k \bigcap \{x : \; f_h(x) > t a_k \; \text{ per ogni } h \geq n\} \, .$$

Evidentemente $B_{k,n} \subset B_{k,n+1} \subset A_k$ e inoltre $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{k,n} = A_k$, dunque

$$\begin{aligned}\int_X f_n \, d\mu &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f_n \, d\mu \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{k,n}} f_n \, d\mu \geq t \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(B_{k,n}),\end{aligned}$$

passando al limite rispetto ad n si ottiene

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq t \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k) = t \int_X g \, d\mu.$$

Da quest'ultima relazione data l'arbitrarietá di $g \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$ si ottiene la tesi per $t \uparrow 1$. □

TEOREMA 4.3 (Convergenza dominata). *Sia g una funzione μ-sommabile ed $f, (f_n)_{n=1}^{\infty}$ siano μ-misurabili. Supponiamo inoltre che $\mid f_n \mid \leq g$ e $f_n \to f$ μ-q.o. per $n \uparrow \infty$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int \mid f_n - f \mid \; d\mu = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie al lemma di Fatou

$$\int 2g \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (2g - \mid f - f_n \mid) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - \mid f - f_n \mid) \, d\mu$$

e dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \int \mid f - f_n \mid \; d\mu \leq 0.$$

□

Alla fine di questa sezione enunciamo senza dimostrazione il teorema di Fubini.

DEFINIZIONE 4.5 (Misure prodotto). *Siano μ, ν misure assegnate rispettivamente su X e su Y. Definiamo la misura $\mu \times \nu : \mathcal{P}(X \times Y) \to [0, \infty]$ ponendo per ogni $S \subset X \times Y$,*

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) \right\},$$

dove l'estremo inferiore é fatto la variare di $A_n \subset X$ μ-misurabile e $B_n \subset Y$ ν-misurabile ($n = 1, \dots$) tali che

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n).$$

La misura $\mu \times \nu$ viene detta misura prodotto di μ e ν.

TEOREMA 4.4 (Fubini). *Siano μ, ν misure assegnate rispettivamente su X e su Y.*

- *(i) Se* $A \subset X$ *é* μ*-misurabile e* $B \subset Y$ *é* ν*-misurabile, allora* $A \times B$ *é* $\mu \times \nu$*-misurabile e inoltre* $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
- *(ii) Se* $S \subset X \times Y$ *é* σ*-finito e misurabile rispetto a* $\mu \times \nu$*, allora* $S_y = \{x : (x,y) \in S\}$ *é* μ*-misurabile per* ν *quasi ogni* y*,* $S_x = \{y : (x,y) \in S\}$ *é* ν*-misurabile per* μ *quasi ogni* x*, inoltre*
$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y)\ d\nu_y = \int_X \mu(S_x)\ d\mu_x$$
- *(iii) Se* f *é* $(\mu \times \nu)$*-integrabile e* σ*-finita allora le applicazioni*
$$y \to \int_X f(x,y)\ d\mu_x; \quad x \to \int_X f(x,y)\ d\nu_y$$
sono rispettivamente ν*-integrabile e* μ*-integrabile e inoltre*
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu) &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)\ d\mu_x\right]\ d\nu_y \\ &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)\ d\nu_y\right]\ d\mu_x\end{aligned}$$

Esercizi

Esercizio 1. Utilizzando la relazione
$$(\inf_{n\geq 1} f_n)^{-1}[-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[-\infty, a)$$
provare la prima parte della (ii) del Teorema 4.1 e utilizzare la prima parte della (ii) per provare la seconda.

Esercizio 2. Verificare (almeno nel caso che u é limitata con supporto finito) che se nella (4.3) si sostituisce l'estremo superiore con l'estremo inferiore con la scelta delle funzioni semplici $v \geq u$, si perviene allo stesso risultato.

5. La misura di Hausdorff.

In questa sezione introduciamo le definizioni e le proprietá elementari delle misure di Hausdorff. Tali misure son introdotte per misurare sottonisiemi di $\mathbb{R}^N$ che non sono visti dalla misura di Lebesgue ovvero che hanno misura di Lebesgue nulla. L'introduzione delle misure di Hausdorff é alla base del concetto di dimensione frattale di Hausdorff.

DEFINIZIONE 5.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Definiamo*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \ : \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta \right\},$$

dove

$$\omega(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}, \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

La misura $\mathcal{H}^s_\delta$ é detta δ-premisura di Hausdorff. Per costringere il ricoprimento C_j a seguire il profilo dell'insieme A si manda δ a zero ottenendo cosí la definizione di misura di Hausdorff.

DEFINIZIONE 5.2 (Misura di Hausdorff). *Per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$ definiamo*

$$\mathcal{H}^s(A) \equiv \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

OSSERVAZIONE 5.1. *Osserviamo che $\mathcal{L}^N(B(x,r)) = \omega(n) r^N$ per ogni palla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$, inoltre se s é un intero si puó verificare che sulle superfici regolari k-dimensionali $\mathcal{H}^s$ coincide con la ordinaria misura di superficiale. Questa é la ragione della scelta fatta per $\omega(s)$ nella definitione* 5.1.

TEOREMA 5.1. *$\mathcal{H}^s$ é una misura Borel regolare per ogni $0 \leq s < \infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Preliminarmente verifichiamo che $\mathcal{H}^s_\delta$ é una misura. Sia $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un ricporimento di A_n, $A_n \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^n$ con $diam C_j^n \leq \delta$, allora $\bigcup_{n,j=1}^\infty C_j^n$ é un ricoprimento di $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, dunque

$$\mathcal{H}^s_\delta \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \omega(s) \left(\frac{diam C_j^n}{2} \right)^s.$$

Considerando dunque l'estremo inferiore rispetto a tutti i ricoprimenti cosí costituiti si ottiene

$$\mathcal{H}^s_\delta \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_n).$$

Siccome poi $\mathcal{H}^s_\delta$ é monotona rispetto ad s si ottiene

$$\mathcal{H}^s_\delta \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_n).$$

Passando al limite su $\delta \to 0$ si deduce che $\mathcal{H}^s$ é una misura esterna.
Proviamo ora che $\mathcal{H}^s$ é una misura di Borel. Siano dunque $A, B \subset \mathbb{R}^N$ con $dist(A,B) > 0$ e scegliamo $0 < \delta < \frac{dist(A,B)}{4}$. Sia poi C_n un ricoprimento di $A \cup B$, $A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ con $diam(C_n) \leq \delta$. Con questa scelta di δ risulta $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $C_i \cap A \neq \emptyset$ e $C_j \cap B \neq \emptyset$ e inoltre $A \subset \bigcup_{C_i \cap A \neq \emptyset}$ e $B \subset \bigcup_{C_j \cap B \neq \emptyset}$ dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) &\leq \sum_{C_i \cap A \neq \emptyset} \omega(s) \left(\frac{diam C_i}{2}\right)^s + \sum_{C_j \cap B \neq \emptyset} \omega(s) \left(\frac{diam C_j}{2}\right)^s \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(s) \left(\frac{diam C_n}{2}\right)^s .
\end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ otteniamo $\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B)$ se $0 < 4\delta < dist(A,B)$ e finalmente per $\delta \to 0$ otteniamo $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$ e dunque

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A \cup B),$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^N$ tali che $dist(A,B) > 0$. Grazie al criterio di Caratheodory ne consegue che $\mathcal{H}^s$ é una misura di Borel. Infine proviamo che $\mathcal{H}^s$ é Borel regolare. Si osservi per iniziare che nella definizione 5.1 é possibile considerare i ricoprimenti $\{C_j\}$ costituiti da insiemi chiusi dato che $diam \bar{C} = diam C$ per ogni $C \subset \mathbb{R}^N$. Sia ora $A \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dunque $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ per ogni $\delta > 0$. Per ogni $n \geq 1$ scegliamo i chiusi $\{C_j^n\}$ tali che $diam(C_j^n) \leq \frac{1}{n}$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^n$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega(s) \left(\frac{diam C_j^n}{2}\right) \leq \mathcal{H}^s_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Definiamo $A_n \equiv \bigcup_{j=1} \infty C_j^n$, $B \equiv \bigcap_{n=1} \infty A_n$; B é un Boreliano e $A \subset B$ inoltre

$$\mathcal{H}^s_{1/n}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega(s) \left(\frac{diam C_j^n}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$, e siccome $A \subset B$ si deduce $\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$ $\square$

Il prossimo teorema che enunciamo senza dimostrazione riassume alcune proprietá elementari della misura di Hausdorff di facile verifica.

Teorema 5.2. *La misura di Hausdorff verifica le seguenti proprietá elementari*

- *i)* $\mathcal{H}^0$ *coincide con la misura* # *introdotta in* 2.1.
- *ii)* $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *su* $\mathbb{R}^1$.
- *iii)* $\mathcal{H}^s \equiv 0$ *su* $\mathbb{R}^N$ *per ogni* $s > N$.
- *iv)* $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *per ogni* $\lambda > 0$ *ed* $A \subset \mathbb{R}^N$.

- *v)* $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *per ogni isometria* $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *ed ogni* $A \subset \mathbb{R}^N$.

Per verificare che un insieme $A \subset R^N$ ha misura di Hausdorff nulla é sufficiente provare che esiste $\delta > 0$ tale che $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ vale cioé il seguente lemma di facile dimostrazione.

LEMMA 5.1. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^N$ *e* $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ *per qualche valore di* $0 < \delta \leq \infty$. *Allora* $\mathcal{H}^s(A) = 0$

Prima di dare la definizione di dimensione di un insieme secondo Hausdorff proviamo il seguente lemma che asserisce che al variare del parametro s la misura $\mathcal{H}^s(A)$ salta dal valore infinito al valore zero e il valore per il quale avviene il salto definisce la dimensione dell' insiema A.

LEMMA 5.2. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^N$ *e* $0 \leq s < t < \infty$. *Allora risulta*

- *i)* $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$.
- *ii)* $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Per provare la (i) osserviamo che se $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ e $\delta > 0$ allora esiste un ricoprimento $\{C_j\}$ tale che $diamC_j \leq \delta$, $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j$ e

$$\sum_{j=1}^\infty \omega(s)\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^\infty \omega(t)\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^t \\
&= \frac{\omega(t)}{\omega(s)} 2^{s-t} \sum_{j=1}^\infty \omega(s)\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^s (diamC_j)^{t-s} \\
&\leq \frac{\omega(t)}{\omega(s)} 2^{s-t} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1)
\end{aligned}$$

Per $\delta \to 0$ si conclude $\mathcal{H}^t(A) = 0$ e cosí la (i) é provata. La (ii) segue immediatamente dalla (i). □

DEFINIZIONE 5.3. *La dimensione di Hausdorff di un insieme* $A \subset \mathbb{R}^N$ *si definisce nel modo seguente*

$$\mathcal{H}_{dim}(A) \equiv \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

La misura di Hausdorff N-dimensionale $\mathcal{H}^N$ coincide con la misura di Lebesgue N-dimensionale $\mathcal{L}^N$ in $\mathbb{R}^N$. Per dimostrare parte del risultato enunciato utilizzeremo la disuguaglianza isodiametrale.

TEOREMA 5.3. *Per ogni* $A \subset \mathbb{R}^N$ *risulta*

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \omega_N \left(\frac{diamA}{2}\right)^N$$

Teorema 5.4.

$$\mathcal{H}^N(B) = \mathcal{L}^N(B) \quad \forall B \subset \mathbb{R}^N, \ \textit{con } B \textit{ boreliano} .$$

Dimostrazione. Cominciamo a provare che $\mathcal{L}^N \leq \mathcal{H}^N$. Sia dunque $A \subset \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, grazie alla disuguaglianza isodiametrale si ottiene

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^N(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_N \left(\frac{diamC_j}{2}\right)^N$$

e dunque $\mathcal{L}^N(A) \leq \mathcal{H}^N_\delta(A)$ e dunque anche

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \mathcal{H}^N(A).$$

Viceversa sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$ evidentemente effettuando i ricoprimenti con ipercubi Q_j si ottiene

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_N \left(\frac{diamQ_j}{2}\right)^N ; \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j; \ diamQ_j \leq \delta \right\}$$

e dato che $(diamQ_j)^N = \mathcal{L}^N(Q_j)\sqrt{N^N}$

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_N \sqrt{N^N}}{2^N} \mathcal{L}^N(Q_j); \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j; \ diamQ_j \leq \delta \right\}.$$

Resta cosí provato che $\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq C_N \mathcal{L}^N(A)$ con $C_N = \frac{\omega_N \sqrt{N^N}}{2^N}$ e dunque anche

$$\mathcal{H}^N(A) \leq C_N \mathcal{L}^N(A)$$

Per dimostrare il teorema é sufficiente provare che $C_N = 1$ almeno nel caso delle palle, ovvero $\mathcal{H}^N(Q(x,r)) = \mathcal{L}^N(Q(x,r)) = r^N$ per ogni ipercubo $Q(x,r) \subset \mathbb{R}^N$. La conclusione si ottiene poi applicando il teorema di estensione. Osserviamo daltronde che se $Q(x,r)$ é un generico ipercubo di R^N e $\delta > 0$ non é difficile verificare che (si tratta di applicare il lemma di ricoprimento di Vitali) esiste una famiglia di sfere disgiunte $\{B_j\}$ contenute in $Q(x,r)$ con $diamB_j \leq \delta$ e tale $\mathcal{L}^N(Q(x,r)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^N(B_j)$ ovvero tale che, posto $E = Q(x,r) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, risulta $\mathcal{L}^N(E) = 0$ e dunque anche $\mathcal{H}^N_\delta(E) = 0$. Sussiste dunque la seguente catena di disuguaglianze

$$\mathcal{H}^N_\delta(Q(x,r)) \leq \mathcal{H}^N_\delta(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cup E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^N_\delta(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_N}{2^N}(diamB_j)^N$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^N(B_j) = \mathcal{L}^N(Q(x,r)).$$

Finalmente da questa catena di diseguaglianze si ricava passando al limite per $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^N(Q(x,r)) \leq \mathcal{L}^N(Q(x,r))$ e dunque la tesi. □

6. Frattali autosimili

Molti frattali sono costruiti come unioni di parti che sono simili all'insieme completo. Un esempio classico si ottiene considerando l'insieme di Cantor, per ottenere tale insieme si preleva dall'intervallo $[0, 1]$ un terzo centrale ovvero l'intervallo $]1/3, 2/3[$, si ripete l'operazione di prelevare un terzo centrale sugli sugli intervalli rimanenti $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$, ancora si ripete l'-operazione di prelevare un terzo centrale sui quattro intervalli rimanenti, $[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]$ e si continua a procedere allo stesso modo per induzione. Se denotiamo dunque $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, definiamo C_k a partire da C_{k-1} prelevando un terzo centrale in ciascuno dei 2^{k-1} intervalli costituenti C_{k-1}. L'insieme $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ é autosimile. In questa sezione studieremo alcune proprieté dei frattali di questo tipo.

Per iniziare ricordiamo come sono definite le contrazioni su un insieme, sia dunque D un sottoinsiem chiuso di $\mathbb{R}^N$, un'applicazione $T : D \to D$ la diremo contrazione su D se esiste una costante $0 < c < 1$ tale che

$$| T(x) - T(y) | \leq c \mid x - y \mid \quad \forall x, y \in D.$$

Definizione 6.1. *Siano $T_1, \ldots T_m$ contrazioni su D chiuso, diremo che $F \subset D$ é invariante rispetto alle trasformazioni T_i se e solo se*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

L'insieme di Cantor é invariante rispetto alle seguenti due contrazioni, $T_1(x) = \frac{1}{3}x$, $T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ infatti $T_1(C)$ e $T_2(C)$ costituiscono la metá sinistra e destra di C rispettivamente e dunque risulta, $C = T_1(C) \cup T_2(C)$. Proveremo che le due contrazioni T_1 e T_2 caratterizzano l'insieme di Cantor nel senso che questo é l'unico compatto non vuoto invariante rispetto a T_1 e T_2. Per provare questo risultato introduciamo una metrica sulla famiglia dei sottoinsiemi compatti di D che denoteremo nel seguito con $\mathcal{K}$. Per ogni $A \in \mathcal{K}$ e $\delta > 0$ denotiamo

$$A_\delta = \{x \in D : \exists a \in A : \mid x - a \mid \leq \delta\}.$$

L'insieme $\mathcal{K}$ é uno spazio metrico se munito della distanza

$$d_H(A, B) = d(A, B) = \inf \{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\},$$

per ogni $A, B \in \mathcal{K}$).
La distanza introdotta viene detta distanza di Hausdorff e puó essere definita analogamente nel seguente modo

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \mid x - y \mid, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \mid x - y \mid \right\},$$

lo spazion metrico $(\mathcal{K}, d_H)$ é completo.

TEOREMA 6.1. *Siano $T_1, \dots, T_m$ contrazioni su $D \subset \mathbb{R}^N$ tali che*

$$| T_i(x) - T_i(y) | \leq c_i | x - y | \qquad \forall x, y \in D$$

e con $c_i < 1$ per ogni i. Esiste allora un unico insieme compatto non vuoto $F \subset D$ invariante rispetto alle trasformazioni T_i. Se inoltre definiamo una trasformazione T definita su $\mathcal{K}$ ponendo

$$T(E) = \bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)$$

e denotiamo con T^k l'iterata n-ma di S definita ponendo $T^0(E) = E$, $T^k(E) = T(T^{k-1}(E))$, risulta

$$F = \cap_{k=1}^{\infty} T^k(E)$$

per ogni $E \in \mathcal{K}$ tale che $T_i(E) \subset E$ per ogni i.

DIMOSTRAZIONE. $\square$

Il prossimo lemma consente una stima dal basso della dimensione di un insieme F. Per brevitá di notazione chiameremo distribuzione di massa su F una misura positiva concentrata su F (con supporto contenuto in F) tale che $0 < \mu(F) < \infty$.

LEMMA 6.1 (Principio di distribuzione di massa). *Sia μ una distribuzione di massa su $F \subset \mathbb{R}^N$ e supponiamo che fissato $s \in \mathbb{R}$ esistano due costanti $c > 0, \delta > 0$ tali che $\mu(U) \leq c\ diam(U)^s$ per ogni $U \subset \mathbb{R}^N$ tale che $diam(U) \leq \delta$. Allora*

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{c}\mu(F)$$

e dunque $\mathcal{H}_{dim}F \geq s$.

La questione del calcolo della dimensione s di un frattale autosimile in molti casi puó essere affortata con successo ed collegata alla soluzione dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^s = 1.$$

Il primo risultato che consente una stima dall'alto della dimensione

LEMMA 6.2. *Siano $T_1, \dots, T_m$ contrazioni definite su un insieme chiuso $D \subset \mathbb{R}^N$ tali che per ogni $x, y \in D$*

$$| T_i(x) - T_i(y) | \leq c_i | x - y |$$

con $c_i < 1$ per ogni i e sia F compatto invariante rispetto alle T_i. Allora $\mathcal{H}_{dim}F \leq s$ con s soluzione dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{6.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia s come nella (6.1). Denotiamo con J_k la famiglia di tutte le $k-$ple di interi $(i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_j \leq m$. Denotiamo per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$, $A_{i_1,\dots,i_k} = T_{i_1} o \dots o\, T_{i_k}(A)$. Dato che F é ivariante rispetto alle T_i risulta

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1,\dots,i_k}.$$

Verifichiamo che questo ricoprimento (ricoprimento naturale) fornisce una stima dall'alto per la dimensione di Hausdorff.

$$\sum_{J_k} (diam\ F_{i_1,\dots,i_k})^s \leq \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s (diam\ F)^s$$
$$= \left(\sum_{i_1=1}^{m} c_{i_1} \right) \dots \left(\sum_{i_k=1}^{m} c_{i_k} \right) (diam\ F)^s = (diam\ F)^s.$$

Nella prima disuguaglianza si é applicato il fatto che le T_i sono contrazioni e nell'ultima uguaglianza si é utilizzata la (6.1). A questo punto per ogni fissato $\delta > 0$ scegliamo k sufficientemente grande affinché $(diam\ F_{i_1,\dots,i_k}) \leq (\max_i c_i) \leq \delta$ ed otteniamo utilizzando il ricoprimento naturale $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq (diam\ F)^s$ e dunque anche $\mathcal{H}^s(F) \leq (diam\ F)^s < \infty$

□

Un requisito essenziale per il calcolo della dimensione é che le copie $T_i(F)$ dell'insieme F non si sovrappongano eccessivamente. Troppe intersezioni fanno abbassare la dimensione dell'insieme. Nel prossimo teorema proveremo una stima dal basso per la dimensioni di F nell'ipotesi che le copie di F date da $T_i(F)$ non si intersechino affatto.

TEOREMA 6.2. *Siano $T_1, \dots, T_m$ contrazioni definite su un insieme chiuso $D \subset \mathbb{R}^N$ tali che*

$$b_i \mid x - y \mid \leq \mid T_i(x) - T_i(y) \mid \qquad \forall x, y \in D$$

con $0 < b_i < 1$ per ogni i. Sia poi F invariante rispetto alle T_i,

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} T_i(F)$$

e siano $T_i(F)$ disgiunti tra di loro. Allora $\mathcal{H}_{dim} \geq s$, con

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $d > 0$ la minima distanza tra due coppie disgiunte dei compatti $T_1(F), \dots, T_m(F)$. Sia come nel Teorema 6.2 $F_{i_1,\dots,i_k} =$

$T_{i_1} o \ldots o\, T_{i_k}(F)$ e definiamo μ ponendo $\mu(F_{i_1,\ldots,i_k}) = (b_{i_1} \ldots b_{i_k})^s$. Dato che

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu(F_{i_1,\ldots,i_k,i}) &= \sum_{i=1}^{m} (b_{i_1} \ldots b_{i_k} b_i)^s \\
&= (b_{i_1} \ldots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1,\ldots,i_k}) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_{i_1,\ldots,i_k,i}\right)
\end{aligned}$$

ne segue che μ é una distribuzione di massa su F con $\mu(F) = 1$ $\square$